PART3　不等式の証明

例題

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき，不等式 $xy>4x+3y-12$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2-x+1 \geqq x$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+2y^2-2xy+4y \geqq -4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

練習

(1)　$a > b$，$c > d$ のとき，不等式 $ac + bd > ad + bc$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2 + 3x > -3$ を証明せよ。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y + 2 \geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

第 2 講　PART3 確認問題

1　$x<-1$, $y<4$ のとき, 不等式 $xy>4x-y+4$ を証明せよ。

[証明]

(左辺) − (右辺) より

$$xy-(4x-y+4)=xy-4x+y-4$$
$$=(y-\boxed{ア})x+(y-\boxed{ア})$$
$$=(x+\boxed{イ})(y-\boxed{ウ})$$

$x<-1$，$y<4$ より

$$x+\boxed{イ}<0,\quad y-\boxed{ウ}<0$$

よって

$$(x+\boxed{イ})(y-\boxed{ウ})>0$$

したがって，$xy-(4x-y+4)>0$ より

$$xy>4x-y+4$$

2　x が実数のとき，不等式 $x^2-5x>-7$ を証明せよ。

[証明]

(左辺) − (右辺) より

$$x^2-5x-(-7)=x^2-5x+7$$
$$=\left(x-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)^2-\frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}+7$$
$$=\left(x-\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって

$$x^2-5x>-7$$

3 x，y が実数のとき，不等式

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$$

を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

[証明]

$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13$

$=x^2+\left(2y-\boxed{ケ}\right)x+5y^2+8y+13$

$=\left\{x+\left(y-\boxed{コ}\right)\right\}^2-\left(y-\boxed{サ}\right)^2+5y^2+8y+13$

$=\left(x+y-\boxed{コ}\right)^2+4y^2+12y+9$

$=\left(x+y-\boxed{コ}\right)^2+\left(\boxed{シ}y+\boxed{ス}\right)^2 \geqq 0$

よって

$$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$$

等号が成り立つのは

$$x+y-\boxed{コ}=0 \quad かつ \quad \boxed{シ}y+\boxed{ス}=0$$

すなわち，$x=\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$，$y=\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}$ のときである。

PART3　不等式の証明

例題

(1)　$x>3$，$y>4$ のとき，不等式 $xy>4x+3y-12$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2-x+1\geqq x$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+2y^2-2xy+4y\geqq -4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$xy-(4x+3y-12)=xy-4x-3y+12=(y-4)x-3(y-4)=(x-3)(y-4)$

$x>3$，$y>4$ より　$x-3>0$，$y-4>0$

よって　$(x-3)(y-4)>0$

したがって，$xy-(4x+3y-12)>0$　より　$xy>4x+3y-12$

(2)　$(x^2-x+1)-x=x^2-2x+1=(x-1)^2\geqq 0$

よって　$x^2-x+1\geqq x$

等号が成り立つのは，$x=1$ のときである。

(3)　$x^2+2y^2-2xy+4y-(-4)=x^2-2yx+2y^2+4y+4$

$$=(x-y)^2-y^2+2y^2+4y+4$$

$$=(x-y)^2+y^2+4y+4$$

$$=(x-y)^2+(y+2)^2\geqq 0$$

よって　$x^2+2y^2-2xy+4y\geqq -4$

等号が成り立つのは，$x=y$ かつ $y=-2$　すなわち，$x=y=-2$　のときである。

練習

(1)　$a>b$，$c>d$ のとき，不等式 $ac+bd>ad+bc$ を証明せよ。

(2)　x が実数のとき，不等式 $x^2+3x>-3$ を証明せよ。

(3)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)　$(ac+bd)-(ad+bc)=ac-ad+bd-bc=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d)$

$a>b$，$c>d$ より　$a-b>0$，$c-d>0$

よって　$(a-b)(c-d)>0$

したがって　$ac+bd>ad+bc$

(2)　$x^2+3x-(-3)=x^2+3x+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

よって　$x^2+3x>-3$

(3)　$$\begin{aligned}x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2&=x^2-(2y-2)x+5y^2+2y+2\\&=\{x-(y-1)\}^2-(y-1)^2+5y^2+2y+2\\&=(x-y+1)^2+4y^2+4y+1\\&=(x-y+1)^2+(2y+1)^2\geqq 0\end{aligned}$$

よって　$x^2-2xy+5y^2+2x+2y+2\geqq 0$

等号が成り立つのは，$x-y+1=0$　かつ　$2y+1=0$

つまり，$x=-\frac{3}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$　のときである。

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：1，ウ：4

[解説]

(左辺)－(右辺)より [A]

$$xy-(4x-y+4)=xy-4x+y-4$$
$$=(y-4)x+(y-4)$$
$$=(x+\mathbf{1})(y-\mathbf{4})$$

$x<-1$，$y<4$ より

$$x+1<0,\ y-4<0$$

よって

$$(x+1)(y-4)>0$$ [A]

したがって，$xy-(4x-y+4)>0$ より

$$xy>4x-y+4$$

[A]　不等式 $A>B$ の証明
$A-B>0$ が成り立つことを示す。
ここでは，(負)×(負)＝(正)であることを用いている。

2 **[正解]** エ：5，オ：2，カキ：25，ク：4

[解説]

(左辺)－(右辺)より [B]

$$x^2-5x-(-7)=x^2-5x+7$$
$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7$$
$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$ [B]

よって

$$x^2-5x>-7$$

[B]　不等式 $A>B$ の証明
$A-B>0$ が成り立つことを示す。
ここでは，(実数)$^2\geqq0$ であることを用いている。

3 **[正解]** **ケ**：4，**コ**：2，**サ**：2，**シ**：2，**ス**：3，
セ：7，**ソ**：2，**タチ**：-3，**ツ**：2

[解説]

$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13$

$=x^2+(2y-4)x+5y^2+8y+13$

$=\{x+(y-2)\}^2-(y-2)^2+5y^2+8y+13$

$=(x+y-2)^2+4y^2+12y+9$

$=(x+y-2)^2+(2y+3)^2 \geqq 0$ [C]

よって

$x^2+2xy+5y^2-4x+8y+13 \geqq 0$

等号が成り立つのは

$x+y-2=0$　かつ　$2y+3=0$

すなわち，$x=\dfrac{7}{2}$，$y=-\dfrac{3}{2}$ のときである。

[C]　実数の平方の性質
実数 a，b について　$a^2+b^2 \geqq 0$
（等号成立は $a=b=0$ のとき）